

. Método de determinantes.

Sean las ecuaciones heterogéneas:

$$a_1x + b_1y + c_1z = n_1$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = n_2$$

$$a_3x + b_2y + c_2z = n_3$$

Para resolver este sistema de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas se pueden utilizar los determinantes de tercer orden, tal como se plantean a continuación:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} n_1 \dots b_1 \dots c_1 \\ n_2 \dots b_2 \dots c_2 \\ n_3 \dots b_3 \dots c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 \dots b_1 \dots c_1 \\ a_2 \dots b_2 \dots c_2 \\ a_3 \dots b_3 \dots c_3 \end{vmatrix}} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 \dots n_1 \dots c_1 \\ a_2 \dots n_2 \dots c_2 \\ a_3 \dots n_3 \dots c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 \dots b_1 \dots c_1 \\ a_2 \dots b_2 \dots c_2 \\ a_3 \dots b_3 \dots c_3 \end{vmatrix}} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 \dots b_1 \dots n_1 \\ a_2 \dots b_2 \dots n_2 \\ a_3 \dots b_2 \dots n_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 \dots b_1 \dots c_1 \\ a_2 \dots b_2 \dots c_2 \\ a_3 \dots b_3 \dots c_3 \end{vmatrix}}$$

La regla de Sarrus se utiliza para desarrollar un determinante de tercer grado. Consiste en escribir los dos primeros renglones a continuación del tercero y se trazan líneas oblicuas ascendentes y descendentes, luego se suman separadamente los valores indicados por las oblicuas descendentes y los indicados por las oblicuas ascendentes, finalmente se resta la segunda suma de la primera.

$$\begin{array}{ccc} a_1 & b_2 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_a & b_2 & c_2 \end{array}$$

De esta manera resulta que:

$$\Delta = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_2 - a_3 b_2 c_1$$

Ejemplo:

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales por determinantes.

$$3x - y + 2z = 11$$

$$x - 2y + 3z = 8$$

$$2x - 3y + z = -1$$

Para obtener el valor de x se emplea el determinante correspondiente.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 11 & \dots & -1 & \dots & 2 \\ 8 & \dots & -2 & \dots & 3 \\ -1 & \dots & -3 & \dots & 1 \\ 11 & \dots & -1 & \dots & 2 \\ 8 & \dots & -2 & \dots & 3 \\ 3 & \dots & -1 & \dots & 2 \\ 1 & \dots & -2 & \dots & 3 \\ 2 & \dots & -3 & \dots & 1 \\ 3 & \dots & -1 & \dots & 2 \\ 1 & \dots & -2 & \dots & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & \dots & -1 & \dots & 2 \\ 1 & \dots & -2 & \dots & 3 \\ 2 & \dots & -3 & \dots & 1 \\ 3 & \dots & -1 & \dots & 2 \\ 1 & \dots & -2 & \dots & 3 \end{vmatrix}}$$

$$x = \frac{(11)(-2)(1) + 8(-3)(2) + (-1)(-1)(3) - (8)(-1)(1) - (11)(-3)(3) - (-1)(-2)(2)}{3(-2)(1) + (1)(-3)(2) + (2)(-1)(3) - (1)(-1)(1) - 3(-3)(3) - 2(-2)(2)}$$

$$x = \frac{-22 - 48 + 3 + 8 + 99 - 4}{-6 - 6 - 6 + 1 + 27 + 8}$$

$$x = \frac{-74 + 110}{-18 + 36}$$

$$x = \frac{36}{18}$$

$$x = 2$$

Para obtener el valor de y se emplea el determinante correspondiente.

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & \dots & 11 & \dots & 2 \\ 1 & \dots & 8 & \dots & 3 \\ 2 & \dots & -1 & \dots & 1 \\ 3 & \dots & 11 & \dots & 2 \\ 1 & \dots & 8 & \dots & 3 \end{vmatrix}}{18}$$

$$y = \frac{3(8)(1) + 1(-1)(2) + 2(11)(3) - 1(11)(1) - 3(-1)(3) - 2(8)(2)}{18}$$

$$y = \frac{24 - 2 + 66 - 11 + 9 - 32}{18}$$

$$y = \frac{99 - 45}{18}$$

$$y = \frac{54}{18}$$

$$y = 3$$

Finalmente, para hallar el valor de z se procede de la siguiente manera.

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & \dots & -1 & \dots & 11 \\ 1 & \dots & -2 & \dots & 8 \\ 2 & \dots & -3 & \dots & -1 \\ 3 & \dots & -1 & \dots & 11 \\ 1 & \dots & -2 & \dots & 8 \end{vmatrix}}{18}$$

$$z = \frac{3(-2)(-1) + 1(-3)(11) + 2(-1)(8) - 1(-1)(-1) - 3(-3)(8) - 2(-2)(11)}{18}$$

$$z = \frac{6 - 33 - 16 - 1 + 72 + 44}{18}$$

$$z = \frac{122 - 50}{18}$$

$$z = \frac{72}{18}$$

$z = 4$

Por lo tanto la solución del sistema es **(2, 3, 4)**

Ejercicio:

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por determinantes.

$$7x - 6y - 3z = 15$$

$$\checkmark x + 2y - 3z = 5$$

$$3x - 22y + 6z = 4$$

$$4x + 5y - 7z = -8$$

$$\checkmark x + 3y + z = -9$$

$$3x - 4y - 2z = 25$$

$$2x - 3y + z = -12$$

$$\checkmark x + 2y - 5z = -1$$

$$3x - y + 4z = -6$$